

COMPITINO DI ARITMETICA

18 dicembre 2013

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Esercizio 1.

Sia $(S(X), \circ)$ il gruppo delle permutazioni di un insieme X e sia A un sottoinsieme di X . Poniamo

$$J(A) = \{\sigma \in S(X) \mid \sigma(A) = A\}$$

e

$$F(A) = \{\sigma \in S(X) \mid \sigma(a) = a \forall a \in A\}.$$

- Mostrare che $J(A)$ è un sottogruppo di $S(X)$.
- Mostrare che $F(A)$ è un sottogruppo normale di $J(A)$.
- Calcolare $[J(A) : F(A)]$ nel caso $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ e $A = \{1, \dots, 4\}$.

Esercizio 2.

Sia $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

- Determinare il numero di sottogruppi di G di ordine 4.
- Contare gli omomorfismi da $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ in G .
- Contare gli omomorfismi da $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in G .

Esercizio 3.

Sia $f(x) = x^4 - 4$.

- Determinare la fattorizzazione e il grado del campo di spezzamento del polinomio $f(x)$ su K per $K = \mathbb{Q}, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{13}$.
- Determinare il tipo di fattorizzazione e il campo di spezzamento di $f(x)$ su \mathbb{F}_{503^k} per $k \geq 1$.